19-12-18

Θεώρημα (Rolle)

Έστω $f:[a,b]\to \mathbb{R}$, συνεχής και παράγωγη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)$, τότε $\exists\ \xi\in(a,b)$ τω $f'(\xi)=0$

Απόδειξη

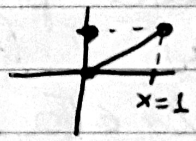
f συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow \exists\ x_1, x_2 \in [a,b]: f(x_1)=\min\{f(x): x\in[a,b]\}=m$ και $f(x_2)=\max\{f(x): x\in[a,b]\}=M$.

Περίπτωση 1 → $m=M \Rightarrow f$ σταθερή στο $[a,b] \Rightarrow$
$f'(x)=0,\ \forall x\in[a,b]$

Περίπτωση 2 → $m<M \Rightarrow$ Είτε $\exists\ \xi\in(a,b)$ τω $f(\xi)=M$
Είτε $\exists\ \xi\in(a,b)$ τω $f(\xi)=m$
$\Rightarrow \exists\ \xi\in(a,b)$ τω η f να παρουσιάζει (ολικό) ακρότατο στο $\xi \Rightarrow \exists\ \xi\in(a,b)$ τω η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\xi \Rightarrow f'(\xi)=0$

Παράδειγμα

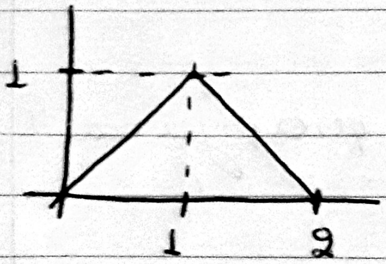
$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$$



$f(0)=f(1)$

Αλλά $f'(x)=1\neq 0,\ \forall x\in(0,1]$

Παράδειγμα



$f(0)=f(2)$ Αλλά $\nexists\ \xi\in(0,2)$ τω $f'(\xi)=0$ (f συνεχής στο $[0,2]$)

Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ) (του Διαφορικού Λογισμού)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής και παρ/μη στο $[a,b]$, τότε $\exists\, \xi\in(a,b)$ τω $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

Απόδειξη

Θέτω $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Η g είναι παρ/μη στο (a,b) και συνεχής στο $[a,b]$ κ' $g(b)=g(a)=0 \xrightarrow{\text{Θ. Rolle}} \exists\, \xi\in(a,b)$ τω $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow$
$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

Παρατήρηση → ΘΜΤ ⇒ Θ. Rolle

Παράδειγμα

(i) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής, παρ/μη στο (a,b), τότε η f έχει το πολύ μια ρίζα στο $[a,b]$, αν $f'(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$

Έστω ότι $\exists\, x_1, x_2\in[a,b]$ τω $x_1<x_2$ έτσι ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0 \xrightarrow{\text{Θ. Rolle}} \exists\, \xi\in(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$ τω $f'(\xi)=0$

Άτοπο

(ii) Νδο η εξίσωση $x-k\cdot\sin x+1=0$ $(k\in(0,1))$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

Θέτω $f(x)=x-k\sin x+1$

$f'(x)=1-k\cos x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\xRightarrow{(i)}$ Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(-n)=-n+1<0 \end{array}\right\} f(0)f(-n)<0$

$\xrightarrow{\text{Bolzano}} \exists\, \xi\in(-n,0): f(\xi)=0$

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy

Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και παραγωγίσιμες στο (a,b), επίσης $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ τω.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Απόδειξη

Θέτουμε $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$

Επειδή $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ ισχύει $g(a) \neq b(b)$ αλλιώς από Θ. Rolle θα υπήρχε $\xi \in (a,b)$ τω. $g'(\xi) = 0$. Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) ισχύει $h(a) = 0 = h(b) \xRightarrow{\text{Θ.Rolle}} \exists\, \xi \in (a,b)$ τω $h'(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi) = 0$$

Παράδειγμα

νδο αν $0 < a < \beta < \pi/2$, τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ τω.

$$\frac{\sin a - \sin \beta}{\cos b - \cos a} = \frac{\sigma\varphi}{\cancel{ctg}}(\xi)$$

$f, g : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$,
$g'(x) = -\sin x \neq 0$, $\forall x \in (0, \pi/2)$
f, g συνεχείς, παραγωγίσιμες στο $(0, \pi/2) \xrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{ΘΜΤ}}$

$$\exists\, \xi \in (a,b) \text{ τω } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos \xi}{-\sin \xi} = \frac{\sin b - \sin a}{\cos b - \cos a} \Leftrightarrow \sigma\varphi\, \xi = \frac{\sin a - \sin b}{\cos b - \cos a}$$

Θεώρημα (ανοιχτό διάστημα)

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, παρ/μη

(i) Αν $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ ($f'(x) > 0$, $\forall x \in I$) τότε η f αύξουσα (αντ. γν. αύξουσα)

(ii) Αν $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$ ($f'(x) < 0$ $\forall x \in I$) τότε η f είναι φθίνουσα (αντ. γν. φθίνουσα)

Απόδειξη

(i) Έστω $x_1, x_2 \in I$ τ.ω. $x_1 < x_2$

Από ΘΜΤ $\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ τ.ω. $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Αν $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

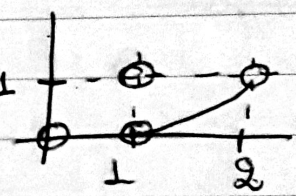
Αν $f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Παράδειγμα

(i) $f(x) = x^3$ γν. αύξουσα αλλά $f'(0) = 0$

(ii) $f : (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ (x-1)^2, & x \in (1,2) \end{cases}$$



Θεώρημα

Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in (a, a+\delta)$

$|f'(x) - \ell| < \varepsilon$

Έστω $x \in (a, a+\delta)$ $\exists\, \xi \in (a, x) \subseteq (a, a+\delta)$ τ.ω.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

$$\xrightarrow{x \to \xi} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'_+(a)} = \ell$$